

## Sistema parametrico di equazioni lineari

Discutere il seguente sistema di equazioni al variare del parametro reale  $k$ .

$$\begin{cases} x + y + kz = 2 \\ x + y + 3z = k - 1 \\ 2x + ky - z = 1 \end{cases}$$

### Elaborazioni

#### Strategia risolutiva

La discussione del sistema si esegue agevolmente applicando il metodo di Cramer. Per discutere il sistema in oggetto si calcola il determinante  $D$  della matrice dei coefficienti delle incognite e si osserva se al variare di  $k$  risulta diverso da zero oppure se si annulla per qualche valore del parametro. Si riscontra che il determinante suddetto si annulla per  $k=2$  e per  $k=3$ . Ciò fatto, si determinano i valori dei determinati  $D_x$ ,  $D_y$ ,  $D_z$  associati alle incognite  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e si analizzano i casi che si possono presentare al variare del parametro  $k$  per la quaterna dei numeri  $D$ ,  $D_x$ ,  $D_y$ ,  $D_z$ .

#### Riportiamo i calcoli

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & k & -1 \end{vmatrix} = k^2 - 5k + 6 = (k-2)(k-3); \quad k^2 - 5k + 6 = 0 \text{ se e solo se } (k=2) \vee (k=3).$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & k \\ k-1 & 1 & 3 \\ 1 & k & -1 \end{vmatrix} = k(k^2 - k - 6) = k(k+2)(k-3)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 1 & k-1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2(k^2 - k + 6)$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & k-1 \\ 2 & k & 1 \end{vmatrix} = -(k^2 - 5k + 6) = -(k-2)(k-3)$$

Sussistono i seguenti casi

- a. Con  $k \neq 2$  e  $k \neq 3$ , poiché  $D \neq 0$  il sistema è determinato, ammette una sola soluzione che è

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{k(k+2)(k-3)}{(k-2)(k-3)} = \frac{k(k+2)}{k-2}; \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-2(k^2 - k + 6)}{(k-2)(k-3)}.$$

- b. Con  $k=2$  risulta  $D=0$ ,  $D_x=-8$ ,  $D_y=-16$ ,  $D_z=0$ . Il sistema è impossibile, quindi non ha soluzioni.  
 c. Con  $k=3$  risulta  $D=0$ ,  $D_x=0$ ,  $D_y=-24$ ,  $D_z=0$ . Il sistema è impossibile, quindi non ha soluzioni.